XLVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (outubro de 2022)

www.opm.mat.br

Instruções Gerais

Após a aplicação, a escola deve manter sob sua custódia a Prova (e rascunhos, se houver) e a Folha de Respostas. Todo esse material deve ficar guardado, sendo vetada qualquer publicação das questões ou comentários sobre a prova até a divulgação dos premiados. A manutenção do sigilo é responsabilidade de todos e há sanções em caso de quebra do sigilo! Após essa data, a escola poderá entregar a Prova aos participantes, mas deverá manter consigo a Folha de Respostas, pois elas podem ser solicitadas.

Na modalidade presencial, a escola deverá providenciar uma lista de presença e registrar com fotos a aplicação e realização da prova. Tais registros poderão ser solicitados.

A participação dos alunos é individual e deve ser identificada com um documento com foto (RG, Carteira de estudante ou Carteira escolar). Caso a prova seja presencial os dados devem ser verificados pela equipe de aplicação. Caso a prova seja feita à distância, o estudante deve incluir foto do documento nas suas resoluções.

As provas deverão ser corrigidas pela escola participante. A escola está recebendo os gabaritos e critérios de correção, e deverá enviar um relatório completo de desempenho de seus alunos na prova. O relatório será disponibilizado em nosso site e por lá poderá ser acessado.

O prazo final para o envio do Relatório de Desempenho dos Estudantes será prorrogado e as escola terão até o dia 30 de outubro para enviar as informações e notas de seus alunos.

A escola deve manter todos os arquivos e todas as provas e resoluções físicas dos seus alunos até o resultado final da OPM 2022. Ao longo do processo de análise das notas, provas podem ser solicitadas para recorreção ou comparação entre notas muito próximas. Caso a escola não envie os arquivos quando solicitados, as sanções podem chegar até a desclassificação da OPM 2022.

Após receber de cada escola inscrita o Relatório de Desempenho dos seus participantes na Fase Única, a Comissão Organizadora irá analisá-los e então divulgará em seu site a lista de premiados, sendo este o único instrumento válido de divulgação dos resultados.

A cerimônia de premiação será realizada em data a se confirmar. A publicação dos resultados e a cerimônia de premiação serão exclusivamente virtuais, por vídeo conferência.

Qualquer irregularidade deve ser imediatamente comunicada por e-mail.

Agradecemos muito pela sua participação, envolvimento e colaboração.

Comissão Organizadora – OPM 2022.

PROBLEMA 1 – Nível Alfa – Campeonato Argentino

Solução

a) A média de pontos foi $\frac{31+24+36}{82} \cong 1{,}110$.

b) Se Patronato vencer os últimos 10 jogos, terá média de pontos $\frac{94+3\cdot 10}{93+10} \cong 1{,}204$.

Se Aldovisi vencer os últimos 10 jogos, terá média de pontos $\frac{99+3\cdot 10}{93+10} \cong 1{,}252$.

c) Se Vélez Sarsfield perder os últimos 10 jogos terá média de pontos $\frac{139+0\cdot 10}{93+10} \cong 1{,}350$. Dessa maneira, a média de pontos de Vélez será maior do que as médias de pelo menos dois clubes (Patronato e Aldovisi) e o clube não será rebaixado.

Critérios de correção

Como trata-se de uma questão com valores aproximados o aluno não teve ser penalizado por valores com mais ou com menos casas decimais. Cada erro de conta que sejam mais do que apenas de aproximação devem ser penalizados em 0,1 ponto.

Item a: 0,4 ponto

• Uso correto da fórmula	0,2 ponto
• Valor correto 1,110	+0,2 ponto

Item b: 0,8 ponto

• Argumentar que no máximo cada equipe pode somar 30 pontos	0,4 ponto
• Valor correto de 1,204 para o Patronato	+0,2 ponto
• Valor correto de 1,252 para o Aldovisi	+0,2 ponto

Item c: 0,8 ponto

• Calcular menor média possível do Velez igual a aproximadamente 1,350	0,4 ponto
• Concluir que a média do Velez será maior que às médias das outras duas equipes	+0,4 ponto

PROBLEMA 2 – Nível Alfa – Apostas Esportivas

Solução

a) Há 3 resultados (2, 4, e 6) resultados favoráveis, enquanto há 3 resultados desfavoráveis (1, 3 e 5). Portanto a chance é $3/3 = 1/1$ (1 para 1).

b) Se p é a probabilidade de o Brasil vencer a Copa, temos

$$\frac{9}{2} = \frac{1-p}{p} \Leftrightarrow 9p = 2 - 2p \Longrightarrow p = \frac{2}{11}.$$

c) $c = \frac{1-p}{p} \Longrightarrow pc = 1 - p \Longrightarrow p(c+1) = 1 \Longrightarrow p = \frac{1}{c+1}$

d) Receberá $750 \cdot 100 + 100 = 75100$ reais.

e) Ao apostar x reais na Austrália, em caso de vitória recebe-se

$$0{,}65x + x = 1{,}65x \text{ reais}$$

Assim, para receber 100 reais é preciso apostar $x = \frac{100}{1{,}65} \cong R\$60{,}61$.

f) Similarmente, para receber 100 reais em casos de vitória de Inglaterra e empate, é preciso apostar $\frac{100}{2{,}30+1} \cong R\$30{,}30$ e $\frac{100}{4{,}5+1} \cong R\$18{,}18$, respectivamente.

Assim, para garantir 100 reais é preciso apostar

$$60{,}61 + 30{,}30 + 18{,}18 = R\$109{,}91.$$

g) Os sites que melhor pagam em cada caso estão indicados na tabela a seguir:

Resultado	**Site**	**Chance**
Vitória do Brasil	C	1/2
Empate	B e D	10/3
Vitória da Sérvia	B, C, D e F	6/1

h) Para receber 100 reais em cada possível cenário descrito pela tabela acima é preciso apostar $\frac{100}{\frac{1}{2}+1} \cong R\$66{,}67$, $\frac{100}{\frac{10}{3}+1} \cong R\$23{,}08$ e $\frac{100}{6+1} \cong R\$14{,}29$, respectivamente. Ou seja, para garantir receber um total de 100 reais é preciso apostar

$$66{,}67 + 23{,}08 + 14{,}29 = R\$104{,}04.$$

Critérios de correção

Cada erro de conta que sejam mais do que apenas de aproximação devem ser penalizados em 0,1 ponto.

Item a: 0,2 ponto

• Resposta $3/3$ ou $1/1$ .... 0,2 ponto

Item b: 0,2 ponto

• Resposta $\frac{2}{11}$ .... 0,2 ponto

Item c: 0,4 ponto

• Demonstração correta de $p = \frac{1}{c+1}$........ 0,4 ponto

Item d: 0,4 ponto

• Cálculo do ganho de $750 \cdot 100 = 75000$ .... 0,2 ponto
• Recebimento total de 75100 (caso o aluno escreva diretamente $750 \cdot 100 + 100$ deve ganhar pontuação completa).... +0,2 ponto

Pauta para resposta sem justificativa

• Apenas resposta sem justificativa .... 0,2 ponto

Item e: 0,4 ponto

• Equação $0{,}65x + x = 100$ ou equivalente........ 0,2 ponto
• Conclusão de $x \cong R\$60{,}61$ .... +0,2 ponto

Pauta para resposta sem justificativa

• Apenas resposta sem justificativa .... 0,2 ponto

Item f: 0,4 ponto

• Valores $30,30$ (Inglaterra) e $18,18$ (empate) .... 0,1 ponto cada
• Concluir com o valor final de $109,91$ .... +0,2 ponto
Pauta para resposta sem justificativa
• Apenas resposta sem justificativa .... 0,2 ponto

Item g: 0,6 ponto

• Chances que pagam melhor $1/2$, $10/3$ e $6/1$ com pelo menos um site indicado em cada .... 0,2 ponto cada

Item h: 0,4 ponto

• Um, dois ou três valores corretos de $66,67$, $23,08$ e $14,29$ .... 0,2 ponto
• Valor total correto de $104,04$ .... +0,2 ponto
Pauta para resposta sem justificativa
• Apenas resposta sem justificativa .... 0,2 ponto

PROBLEMA 3 – Nível Alfa – Paradoxo de Braess

Solução

a) O trecho Início → A leva $\frac{4000}{100} = 40$ minutos.

O trecho A → Final leva 45 minutos.

Assim o tempo médio para ir do Início ao Final leva 85 minutos (ou 1h25min).

b) Seja a o número de carros passando por A em um equilíbrio. Então o caminho por A leva $\frac{a}{100} + 45$ minutos, enquanto o caminho por V leva $45 + \frac{4000-a}{100}$ minutos.

Como ocorre o equilíbrio devemos ter

$$\frac{a}{100} + 45 = 45 + \frac{4000-a}{100} \Leftrightarrow a = 2000$$

O tempo médio de cada trajeto seria $\frac{a}{100} + 45 = 65$ minutos.

c) Tempo no trecho Início → A: $\frac{2000}{100} = 20$ minutos.

Tempo no trecho A → B: 10 minutos.

Tempo no trecho B → Final: $\frac{2001}{100} = 20{,}01$ minutos.

Assim esse motorista levaria $20 + 10 + 20{,}01 = 50{,}01 < 51$ minutos.

d) Caminho Início → A → Final leva $t_1 = \frac{n_1}{100} + 45$ minutos.

Caminho Início → A → B → Final leva $t_2 = \frac{n_1}{100} + 10 + \frac{n_5}{100}$ minutos.

Caminho Início → B → Final leva $t_3 = 45 + \frac{n_5}{100}$ minutos.

e) $t_1 = t_3 \Longrightarrow n_1 = n_5 = n$

$t_1 = t_2 \Longrightarrow \frac{n}{100} + 45 = \frac{n}{100} + 10 + \frac{n}{100} \Longrightarrow n = 3500$

f) Todos os carros que chegam a B devem sair, portanto $n_4 + n_3 = n_5$. Todos os carros devem chegar ao Final, logo $n_2 + n_5 = 4000$.

g) Sabemos que

$$\begin{cases} n_1 = n_5 = 3500 \\ n_1 + n_4 = 4000 \\ n_1 = n_2 + n_3 \\ n_4 + n_3 = n_5 \\ n_2 + n_5 = 4000 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{cases} n_2 = 500 \\ n_3 = 3000 \\ n_4 = 500 \end{cases}$$

h) Temos $t_1 = t_2 = t_3$. Basta calcular um desse valores.

$t_1 = \frac{n_1}{100} + 45 = 35 + 45 = 80$ minutos

Critérios de correção

Item a: 0,3 ponto

• Encontrar o tempo médio de 85 minutos .... 0,3 ponto

Item b: 0,4 ponto

• Perceber que 2000 carros seguem cada caminho por simetria, resolvendo a equação ou equivalente .... 0,2 ponto
• Encontrar o tempo médio de 65 minutos .... +0,2 ponto

Item c: 0,3 ponto

• Escrever explicitamente 20 min, 10 min e 20,01 min (ou apenas < 21 min) .... 0,1 ponto cada

Item d: 0,6 ponto

• Expressões $\frac{n_1}{100} + 45$, $\frac{n_1}{100} + 10 + \frac{n_5}{100}$ e $45 + \frac{n_5}{100}$ .... 0,2 ponto cada

Item e: 0,4 ponto

• Calcular corretamente $n_1 = 3500$ e $n_5 = 3500$ .... 0,2 ponto cada

Item f: 0,4 ponto

• Para B: $n_3 + n_4 = n_5$ .... 0,2 ponto • Para FINAL: $n_2 + n_5 = 4000$ .... 0,2 ponto

Item g: 0,3 ponto

• Valores de n_2, n_3 e n_4 .... 0,1 ponto cada

Item h: 0,3 ponto

• Concluir usando um dos caminhos possíveis que o novo tempo médio é 80 minutos .... 0,3 ponto

PROBLEMA 4 – Nível Alfa – Números Fofos

Solução

a) $7 = 1 + 2 + 4$ é um número fofo.

Se $n = a + b + c$ é uma representação fofa de n, como $0 < a < b$ e $a \mid b$, temos $b \geq 2a$.

Da mesma forma, $c \geq 2b \geq 4a \Longrightarrow a + b + c \geq 4a + 2a + a \geq 7a \geq 7$.

Logo todo número fofo é maior ou igual a 7, e então 7 é o menor número fofo.

b) $9 = 1 + 2 + 6$, $11 = 1 + 2 + 8$ e $2023 = 1 + 2 + 2020$ são representações fofas dos números pedidos.

c) Como 7 é o menor número fofo, os ímpares 1, 3 e 5 não são fofos. Veja que $n = 2k + 1$, com $k \geq 3$ inteiro é fofo, pois $n = 2k + 1 = 1 + 2 + (2k - 2)$ é uma representação fofa de n, pois $1 < 2 < 2k - 2$, $1 \mid 2$ e $2 \mid 2k - 2$.

Logo todo ímpar ≥ 7 é fofo.

d) $2022 = 2 + 4 + 2016$ e $2024 = 8 + 16 + 2000$ são representações fofas dos números 2022 e 2024.

e) Se $n = a + b + c$, com $a < b < c$, $a \mid b$, $b \mid c$, então $2n = 2a + 2b + 2c$, em que $2a < 2b < 2c$, $2a \mid 2b$, $2b \mid 2c$. Logo $2n$ é fofo.

f) Seja b um número ímpar fofo; assim existem x, y, z com $x < y < z$, $b = x + y + z$ e $x \mid y$ e $y \mid z$. Multiplicando por 2^a obtemos $b = 2^a x + 2^a y + 2^a z$, com $2^a x \mid 2^a y$ e $2^a y \mid 2^a z$. Logo $2^a b$ é também fofo.

g) $16 = 1 + 3 + 12$ e $48 = 3 + 9 + 36$ são representações fofas.

h) Utilizando os itens c e f, podemos concluir que um número não fofo deve ser da forma $2^a b$, em que a é natural e $b \in \{1; 3; 5\}$. Se $a \geq 4$, $2^a b = 2^{a-4} b + 3 \cdot 2^{a-4} b + 12 \cdot 2^{a-4} b$ é um número fofo.

Assim se n não é fofo, $n \in \{1; 2; 4; 8; 3; 6; 12; 24; 5; 10; 20; 40\}$.

Note que $40 = 1 + 13 + 26$ é fofo.

Mostraremos que 24 não é fofo e então é o maior número não fofo.

Como feito no item a, se $24 = a + b + c$ é uma representação fofa de 24, temos $24 \geq 7a \Longrightarrow a \leq 3$.

Se $a = 1$, $24 = a + b + c \Longrightarrow 23 = b + c$. Como $b \mid c$, $b \mid b + c = 23 \Longrightarrow b \in \{1; 23\}$. Como $a < b$, $b = 23$, mas então $c = 0$, um absurdo.

Se $a = 2$, $24 = a + b + c \Longrightarrow b + c = 22$. Como $b \mid c$, $b \mid b + c = 22 \Longrightarrow b \in \{1; 2; 11; 22\}$. Como $a \mid b$ e $a < b$, temos $b = 22 \Longrightarrow c = 0$, um absurdo.

Se $a = 3$, $24 = a + b + c \Longrightarrow b + c = 21$. Como $b \mid c$, $b \mid b + c = 21 \Longrightarrow b \in \{1; 3; 7; 21\}$. Como $a \mid b$ e $a < b$, temos $b = 21 \Longrightarrow c = 0$, um absurdo.

Logo 24 é o maior número não fofo.

Critérios de correção

Item a: 0,4 ponto

• Provar que 7 é fofo	0,2 ponto
• Provar que todo número menor que 7 não é fofo	+0,2 ponto

Item b: 0,6 ponto

• Representações fofas de 9, 11 e 2023	0,2 ponto cada

Item c: 0,2 ponto

• Prova de que todo ímpar maior que ou igual a 7 é fofo	0,2 ponto

Item d: 0,4 ponto

• Representações fofas de 2022 e 2024 .... 0,2 ponto cada

Item e: 0,2 ponto

• Prova correta ou simplesmente citar que pode dobrar as parcelas .... 0,2 ponto

Item f: 0,2 ponto

• Prova correta ou simplesmente citar que pode multiplicar as parcelas por 2^a .... 0,2 ponto

Item g: 0,4 ponto

• Representações fofas de 16 e 48 .... 0,2 ponto cada

Item h: 0,6 ponto

• Prova que 24 não é fofo .... 0,4 ponto
• Prova de que todo número maior que 24 é fofo .... +0,2 ponto

PROBLEMA 5 – Nível Alfa – Quadrados

Solução

a) Temos que área = (lado)^2, de modo que o lado do quadrado $ABCD$ é 2.

b) $AI = AH$ pois são lados de um mesmo quadrado.
$Q\hat{A}I = P\hat{A}H$, pois $Q\hat{A}I + I\hat{A}P = Q\hat{A}P = 90° = I\hat{A}H = I\hat{A}P + P\hat{A}H$.
$A\hat{I}Q = A\hat{H}P$, pois $A\hat{I}Q + I\hat{Q}A + Q\hat{A}I = 180° = A\hat{H}P + H\hat{P}A + P\hat{A}H,\ Q\hat{A}I = P\hat{A}H\ e\ I\hat{Q}A = 90° = H\hat{P}A$ pela construção das retas paralelas aos lados do quadrado ABCD.

c) Do mesmo modo, $DH = DG$ pois são lados de um mesmo quadrado, $O\hat{D}H = 90° - H\hat{D}N = N\hat{D}G$ e $D\hat{H}O = 180° - O\hat{D}H - 90° = 180° - N\hat{D}G - 90° = D\hat{G}N$. Logo os triângulos DOH e DNG são congruentes por ALA

d) Repetindo a mesma ideia dos itens anteriores, $BE = BF$, $J\hat{B}E = 90° - E\hat{B}K = K\hat{B}F$ e $B\hat{E}J = 180° - 90° - J\hat{B}E = 180° - 90° - K\hat{B}F = B\hat{F}K$. Assim os triângulos BJE e BKF são congruentes por ALA.

e) Assim como anteriormente, os triângulos CMG e CLF são congruentes pois tem os mesmos ângulos e $CG = CF$.
Logo, $FK = JE = y,\ LF = LK - FK = BC - y = 2 - y,\ NG = NM + MG = DC + LF = 2 + 2 - y = 4 - y$.

f) Continuando o processo, $PH = PO + OH = AD + NG = 2 + 4 - y = 6 - y, EI = EJ + JQ + QI = y + BA + PH = y + 2 + 6 - y = B$, logo $x = 8$.

Critérios de correção

Item a: 0,4 ponto

• lado = 2 .... 0,4 ponto

Item b: 0,6 ponto

• Provar as igualdades $AI = AH, Q\hat{A}I = P\hat{A}H$ e $A\hat{I}Q = A\hat{H}P$ (esta última podia ser indicada diretamente do fato de serem dois triângulos retângulos) .... 0,2 ponto cada

Item c: 0,6 ponto

• Provar as igualdades $DH = DG, O\hat{D}H = N\hat{D}G$ e $D\hat{H}O = D\hat{G}N$ (ou apenas dizer que são triângulos retângulos) . 0,2 ponto cada

Item d: 0,6 ponto

• Provar as igualdades $BE = BF$, $J\hat{B}E = K\hat{B}F$ e $B\hat{E}J = B\hat{F}K$ (ou apenas dizer que são triângulos retângulos) ...... 0,2 ponto cada
• Se o aluno já fez o item b ou o item c completo, então ele pode citar que é análogo .... 0,6 ponto

Item e: 0,4 ponto

• Provar que $LF = 2 - y$ .... 0,2 ponto
• Provar que $NG = 4 - y$ .... +0,2 ponto

Item f: 0,4 ponto

• Provar que $PH = 6 - y$ .... 0,2 ponto
• Provar que $x = 8$ .... +0,2 ponto

PROBLEMA 6 – Nível Alfa – Dominós

Solução

a) Podemos particionar o conjunto em $\{1;11\}$, $\{2;12\}$, $\{3;4\}$, $\{5;6\}$, $\{7;8\}$, $\{9;10\}$, $\{13;14\}$, …, $\{2k+1;2k+2\}$, …, $\{59;60\}$.

b) As exceções são $\{10;11\}$, $\{20;21\}$, $\{30;31\}$, $\{40;41\}$ e $\{50;51\}$.

c) O número que forma o subconjunto com 41 é 40. Para tal, note que cada dominó cobre uma casa de cada cor, existem 30 casas de cada cor e o par $\{10;11\}$ cobre duas casas cinzas. Assim, algum par deve cobrir duas casas brancas ou então o número de casas cinzas cobertas é maior do que o número de casas brancas. Dentro das exceções, os únicos pares que cobrem duas casas brancas são $\{20;21\}$ e $\{40;41\}$. Porém, $20 \in \{20;30\}$, assim o par $\{40;41\}$ deve estar na partição.

d) $\{10;11\}$, $\{30;31\}$ e $\{50;51\}$. Esses conjuntos cobrem duas casas cinzas cada. Qualquer par que é dominó cobre uma casa de cada cor. As únicas outras exceções são $\{20;21\}$, $\{40;41\}$, que cobrem duas casas brancas. Assim, se escolhermos os três subconjuntos citados, a quantidade de casas cinzas cobertas é maior do que a quantidade de casas brancas cobertas, o que é falso.

Critérios de correção

Item a: 1,0 ponto

O aluno pode indicar a construção de pares usando uma figura.

• Indicação de maneira correta (não precisa listar todos os pares)	1,0 ponto
Pontuação Parcial	
• Indicação de pelo menos cinco pares além de $\{1,11\}$ e $\{59,60\}$ sem completar os 30 subconjuntos	0,5 ponto

Item b: 1,0 ponto

• Pares $\{10;11\}$, $\{20;21\}$, $\{30;31\}$, $\{40;41\}$ e $\{50;51\}$.	0,2 ponto cada
• Citar um ou mais pares fora dos listados	-0,2 ponto cada (pontuação mínima 0)

Item c: 1,0 ponto

• Resposta 40 (mesmo sem justificativa)	0,4 ponto
• Notar que cada dominó cobre uma casa de cada cor	0,2 ponto
• Notar que $\{10,11\}$ cobre duas casas cinzas	+0,2 ponto
• Eliminar a possibilidade $\{20,21\}$	+0,2 ponto

Item d: 1,0 ponto

• Qualquer solução correta com justificativa como na solução ou usando os pares $\{2,3\}$ e $\{11,12\}$ que isolam o 1	1,0 ponto
Pauta para resposta sem justificativa	
• Apenas resposta sem justificativa	0,4 ponto

PROBLEMA 7 – Nível Alfa – Números Felizes

Solução

a) $3 \to 9 \to 81 \to 65 \to 61 \to \boxed{37} \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to \boxed{37}$

$19 \to 82 \to 68 \to 100 \to 1$

$23 \to 13 \to 10 \to 1$

Por isso, 19 e 23 são felizes, e 3 não é feliz, pois o processo se repete periodicamente a partir do 5º passo, sem passar pelo número 1.

b) 1111111 e 1111112 são felizes, pois $1111111 \to 7 \to 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1$ e $1111112 \to 10 \to 1$.

c) $356 \to 70 \to 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1$: altura 6

$78999 \to 356 \to 70 \to 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1$: altura 7

$3788\underbrace{99\ldots9}_{973} \to 9 + 49 + 64 + 64 + 81 \cdot 973 = 78999 \xrightarrow{\text{7 iterações}} 1$: altura 8

d) Se n é um número de altura k, o número $\frac{10^n-1}{9} = \underbrace{11\ldots1}_{n}$ é um número de altura $k+1$, pois a primeira iteração desse resulta em n. Então, por exemplo, $\frac{10^{\frac{10^{37889\ldots9}-1}{9}}-1}{9}$, em que há 973 noves em $37889\ldots9$, é um número de altura 10.

e) Para podermos aproveitar o fato de que $130 - 129 = 1$ e $133 - 129 = 4$, e como $193 - 129 \neq 9$, convém fazer com que o último algarismo do quarto número, cuja soma dos quadrados dos dígitos é 193, seja 9. Observando que $193 = 9^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$ e que $4^2 + 4^2 + 4^2 + 9^2 = 129$ (sorte grande!), encontramos os números felizes 44489, 44490, 44491 e 44492, cujas somas dos quadrados dos algarismos são, respectivamente, 193, 129, 130 e 134.

Observação: um possível erro de conta é trocar 193 por 203. Mas 203 também é feliz, pois $203 \to 13 \to 10 \to 1$.

Em tempo: a seguir listamos todas as sequências de quatro números consecutivos felizes com até seis algarismos (obtidos com um programa de computador). Note que 44488 também é feliz, de modo que os *cinco* consecutivos 44488, 44489, 44490, 44491 e 44492 são felizes. Os exemplos com as somas sugeridas pelo problema estão em **negrito**

7839, 7840, 7841, 7842
8739, 8740, 8741, 8742
11248, 11249, 11250, 11251
12148, 12149, 12150, 12151
21148, 21149, 21150, 21151
44488, 44489, 44490, 44491
44489, 44490, 44491, 44492
44939, 44940, 44941, 44942
49439, 49440, 49441, 49442
70839, 70840, 70841, 70842
78039, 78040, 78041, 78042
80739, 80740, 80741, 80742
87039, 87040, 87041, 87042
94439, 94440, 94441, 94442
101248, 101249, 101250, 101251
102148, 102149, 102150, 102151
110248, 110249, 110250, 110251
112048, 112049, 112050, 112051
120148, 120149, 120150, 120151
121048, 121049, 121050, 121051
201148, 201149, 201150, 201151
210148, 210149, 210150, 210151
211048, 211049, 211050, 211051
222688, 222689, 222690, 222691
222689, 222690, 222691, 222692
226288, 226289, 226290, 226291
226289, 226290, 226291, 226292
236839, 236840, 236841, 236842
238639, 238640, 238641, 238642
258598, 258599, 258600, 258601
258599, 258600, 258601, 258602
262288, 262289, 262290, 262291
262289, 262290, 262291, 262292
263839, 263840, 263841, 263842
268339, 268340, 268341, 268342
283639, 283640, 283641, 283642
285598, 285599, 285600, 285601
285599, 285600, 285601, 285602
286339, 286340, 286341, 286342
288894, 288895, 288896, 288897
288984, 288985, 288986, 288987
289884, 289885, 289886, 289887
298884, 298885, 298886, 298887
326839, 326840, 326841, 326842
328639, 328640, 328641, 328642
359994, 359995, 359996, 359997
362839, 362840, 362841, 362842
368239, 368240, 368241, 368242
382639, 382640, 382641, 382642
386239, 386240, 386241, 386242
395994, 395995, 395996, 395997
399594, 399595, 399596, 399597
399954, 399955, 399956, 399957
404488, 404489, 404490, 404491
404489, 404490, 404491, 404492
404939, 404940, 404941, 404942
409439, 409440, 409441, 409442
440488, 440489, 440490, 440491
440489, 440490, 440491, 440492
440939, 440940, 440941, 440942
444088, 444089, 444090, 444091
444089, 444090, 444091, 444092
449039, 449040, 449041, 449042
456639, 456640, 456641, 456642
465639, 465640, 465641, 465642
466539, 466540, 466541, 466542
490439, 490440, 490441, 490442
494039, 494040, 494041, 494042
528598, 528599, 528600, 528601
528599, 528600, 528601, 528602
539994, 539995, 539996, 539997
546639, 546640, 546641, 546642
564639, 564640, 564641, 564642
566439, 566440, 566441, 566442
582598, 582599, 582600, 582601
582599, 582600, 582601, 582602
593994, 593995, 593996, 593997
599394, 599395, 599396, 599397
599934, 599935, 599936, 599937
622288, 622289, 622290, 622291
622289, 622290, 622291, 622292
623839, 623840, 623841, 623842
628339, 628340, 628341, 628342
632839, 632840, 632841, 632842
638239, 638240, 638241, 638242
645639, 645640, 645641, 645642

646539, 646540, 646541, 646542
654639, 654640, 654641, 654642
656439, 656440, 656441, 656442
664539, 664540, 664541, 664542
665439, 665440, 665441, 665442
678884, 678885, 678886, 678887
682339, 682340, 682341, 682342
683239, 683240, 683241, 683242
687884, 687885, 687886, 687887
688784, 688785, 688786, 688787
688874, 688875, 688876, 688877
699798, 699799, 699800, 699801
700839, 700840, 700841, 700842
708039, 708040, 708041, 708042
768884, 768885, 768886, 768887
777794, 777795, 777796, 777797
777974, 777975, 777976, 777977
779774, 779775, 779776, 779777
780039, 780040, 780041, 780042
783999, 784000, 784001, 784002
786884, 786885, 786886, 786887
788684, 788685, 788686, 788687
788864, 788865, 788866, 788867
797774, 797775, 797776, 797777
800739, 800740, 800741, 800742
807039, 807040, 807041, 807042
823639, 823640, 823641, 823642
825598, 825599, 825600, 825601
825599, 825600, 825601, 825602
826339, 826340, 826341, 826342
828894, 828895, 828896, 828897
828984, 828985, 828986, 828987
829884, 829885, 829886, 829887
832639, 832640, 832641, 832642
836239, 836240, 836241, 836242
852598, 852599, 852600, 852601
852599, 852600, 852601, 852602
862339, 862340, 862341, 862342
863239, 863240, 863241, 863242
867884, 867885, 867886, 867887
868784, 868785, 868786, 868787
868874, 868875, 868876, 868877
870039, 870040, 870041, 870042
873999, 874000, 874001, 874002
876884, 876885, 876886, 876887
878684, 878685, 878686, 878687
878864, 878865, 878866, 878867
882894, 882895, 882896, 882897
882984, 882985, 882986, 882987
886784, 886785, 886786, 886787
886874, 886875, 886876, 886877
887684, 887685, 887686, 887687
887864, 887865, 887866, 887867
888294, 888295, 888296, 888297
888674, 888675, 888676, 888677
888764, 888765, 888766, 888767
888924, 888925, 888926, 888927
889284, 889285, 889286, 889287
889824, 889825, 889826, 889827
892884, 892885, 892886, 892887
898284, 898285, 898286, 898287
898824, 898825, 898826, 898827
904439, 904440, 904441, 904442
928884, 928885, 928886, 928887
935994, 935995, 935996, 935997
939594, 939595, 939596, 939597
939954, 939955, 939956, 939957
940439, 940440, 940441, 940442
944039, 944040, 944041, 944042
953994, 953995, 953996, 953997
959394, 959395, 959396, 959397
959934, 959935, 959936, 959937
969798, 969799, 969800, 969801
977774, 977775, 977776, 977777
982884, 982885, 982886, 982887
988284, 988285, 988286, 988287
988824, 988825, 988826, 988827
993594, 993595, 993596, 993597
993954, 993955, 993956, 993957
995394, 995395, 995396, 995397
995934, 995935, 995936, 995937
996798, 996799, 996800, 996801
999354, 999355, 999356, 999357
999534, 999535, 999536, 999537

Critérios de correção

Item a: 1,0 ponto

• Provar que 3 não é feliz .... 0,6 ponto
• Provar que 19 e 23 são felizes .... 0,2 ponto cada

Item b: 1,0 ponto

• Qualquer par de números felizes consecutivos com prova de que são felizes .... 1,0 ponto

Pauta para resposta sem justificativa

• Apenas resposta sem justificativa .... 0,5 ponto

Item c: 1,0 ponto

Caso o aluno erre a altura do 356, mas verifique que as outras duas são essa altura +1 e +2, então deve perder apenas 0,1 ponto por erro de conta.

• Altura do 356 .... 0,4 ponto
• Altura do 78999 .... +0,2 ponto
• Altura do 3788$\underbrace{99\ldots9}_{973}$ .... +0,4 ponto

Item d: 1,0 ponto

• Explicar que tendo n de altura h podemos obter m de altura $h+1$ usando n uns ou outro argumento .... 0,5 ponto
• Explicar como obter um número feliz de altura 10 .... +0,5 ponto

Item e: 1,0 ponto

• Quatro números felizes consecutivos com prova de que são felizes .... 1,0 ponto

Pauta para resposta sem justificativa

• Apenas resposta sem justificativa de que são felizes .... 0,5 ponto
• Apenas três números consecutivos felizes .... 0,0 ponto

XLVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (outubro de 2022)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

PROBLEMA 1 – Nível Beta – Esperança Pitagórica Beta

Solução

a) % de vitórias = $\frac{636^2}{636^2 + 688^2}$ ⇒ número esperado de vitórias = $\frac{636^2}{636^2 + 688^2} \cdot 162 \cong 77$ Jogos

b) Sejam CF = corridas feitas, CS = corridas sofridas. Então

$$\frac{\mathrm{CF}^2}{\mathrm{CF}^2 + CS^2} = 0{,}64 \Leftrightarrow 0{,}36 \cdot \mathrm{CF}^2 = 0{,}64 \cdot \mathrm{CS}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CS}}\right)^2 = \left(\frac{0{,}8}{0{,}6}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CS}} = \frac{4}{3}$$

c) Conforme explicado, a qualidade de um time é $\frac{n}{m}$ e a qualidade de seus adversários é $\frac{m}{n}$. Assim a porcentagem de vitórias seria $\frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}+\frac{m}{n}} = \frac{n^2}{n^2+m^2}$.

Critérios de correção

Item a: 0,8 ponto

• Substituiu os valores corretos na fórmula	0,4 ponto
• Encontrou o número de vitórias	+0,4 ponto

Item b: 0,6 ponto

• Montou a equação correta com CF e CS	0,3 ponto
• Encontrou a razão $\frac{4}{3}$	+0,3 ponto

Item c: 0,6 ponto

• Montou a equação correta usando $\frac{n}{m}$ e $\frac{m}{n}$	0,3 ponto
• Concluiu que % de vitórias = $\frac{n^2}{n^2+m^2}$	+0,3 ponto

PROBLEMA 2 – Nível Beta – Paradoxo de Braess

Solução

a) O trecho Início → A leva $\frac{4000}{100} = 40$ minutos.

O trecho A → Final leva 45 minutos.

Assim o tempo médio para ir do Início ao Final leva 85 minutos (ou 1h25min).

b) Seja a o número de carros passando por A em um equilíbrio. Então o caminho por A leva $\frac{a}{100} + 45$ minutos, enquanto o caminho por V leva $45 + \frac{4000-a}{100}$ minutos.

Como ocorre o equilíbrio devemos ter

$$\frac{a}{100} + 45 = 45 + \frac{4000 - a}{100} \Leftrightarrow a = 2000$$

O tempo médio de cada trajeto seria $\frac{a}{100} + 45 = 65$ minutos.

c) Tempo no trecho Início → A: $\frac{2000}{100} = 20$ minutos.

Tempo no trecho A → B: 10 minutos.

Tempo no trecho B → Final: $\frac{2001}{100} = 20{,}01$ minutos.

Assim esse motorista levaria $20 + 10 + 20{,}01 = 50{,}01 < 51$ minutos.

d) Caminho Início → A → Final leva $t_1 = \frac{n_1}{100} + 45$ minutos.

Caminho Início → A → B → Final leva $t_2 = \frac{n_1}{100} + 10 + \frac{n_5}{100}$ minutos.

Caminho Início → B → Final leva $t_3 = 45 + \frac{n_5}{100}$ minutos.

e) $t_1 = t_3 \Longrightarrow n_1 = n_5 = n$

$t_1 = t_2 \Longrightarrow \frac{n}{100} + 45 = \frac{n}{100} + 10 + \frac{n}{100} \Longrightarrow n = 3500$

f) Todos os carros que chegam a B devem sair, portanto $n_4 + n_3 = n_5$. Todos os carros devem chegar ao Final, logo $n_2 + n_5 = 4000$.

g) Sabemos que

$$\begin{cases} n_1 = n_5 = 3500 \\ n_1 + n_4 = 4000 \\ n_1 = n_2 + n_3 \\ n_4 + n_3 = n_5 \\ n_2 + n_5 = 4000 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{cases} n_2 = 500 \\ n_3 = 3000 \\ n_4 = 500 \end{cases}$$

h) Temos $t_1 = t_2 = t_3$. Basta calcular um desse valores.

$$t_1 = \frac{n_1}{100} + 45 = 35 + 45 = 80 \text{ minutos}$$

Critérios de correção

Item a: 0,3 ponto

• Encontrar o tempo médio de 85 minutos	0,3 ponto

Item b: 0,4 ponto

• Perceber que 2000 carros seguem cada caminho por simetria, resolvendo a equação ou equivalente	0,2 ponto
• Encontrar o tempo médio de 65 minutos	+0,2 ponto

Item c: 0,3 ponto

• Escrever explicitamente 20 min, 10 min e 20,01 min (ou apenas < 21 min)	0,1 ponto cada

Item d: 0,6 ponto

• Expressões $\frac{n_1}{100} + 45$, $\frac{n_1}{100} + 10 + \frac{n_5}{100}$ e $45 + \frac{n_5}{100}$	0,2 ponto cada

Item e: 0,4 ponto

• Calcular corretamente $n_1 = 3500$ e $n_5 = 3500$ .... 0,2 ponto cada

Item f: 0,4 ponto

• Para B: $n_3 + n_4 = n_5$ .... 0,2 ponto • Para FINAL: $n_2 + n_5 = 4000$ .... 0,2 ponto

Item g: 0,3 ponto

• Valores de n_2, n_3 e n_4 .... 0,1 ponto cada

Item h: 0,3 ponto

• Concluir usando um dos caminhos possíveis que o novo tempo médio é 80 minutos .... 0,3 ponto

PROBLEMA 3 – Nível Beta – Quadrados

Solução

g) Temos que área = $(\text{lado})^2$, de modo que o lado do quadrado $ABCD$ é 2.

h) $AI = AH$ pois são lados de um mesmo quadrado.
$Q\hat{A}I = P\hat{A}H$, pois $Q\hat{A}I + I\hat{A}P = Q\hat{A}P = 90° = I\hat{A}H = I\hat{A}P + P\hat{A}H$.
$A\hat{I}Q = A\hat{H}P$, pois $A\hat{I}Q + I\hat{Q}A + Q\hat{A}I = 180° = A\hat{H}P + H\hat{P}A + P\hat{A}H$, $Q\hat{A}I = P\hat{A}H$ e $I\hat{Q}A = 90° = H\hat{P}A$ pela construção das retas paralelas aos lados do quadrado ABCD.

i) Do mesmo modo, $DH = DG$ pois são lados de um mesmo quadrado, $O\hat{D}H = 90° - H\hat{D}N = N\hat{D}G$ e $D\hat{H}O = 180° - O\hat{D}H - 90° = 180° - N\hat{D}G - 90° = D\hat{G}N$. Logo os triângulos DOH e DNG são congruentes por ALA

j) Repetindo a mesma ideia dos itens anteriores, $BE = BF$, $J\hat{B}E = 90° - E\hat{B}K = K\hat{B}F$ e $B\hat{E}J = 180° - 90° - J\hat{B}E = 180° - 90° - K\hat{B}F = B\hat{F}K$. Assim os triângulos BJE e BKF são congruentes por ALA.

k) Assim como anteriormente, os triângulos CMG e CLF são congruentes pois tem os mesmos ângulos e $CG = CF$.
Logo, $FK = JE = y$, $LF = LK - FK = BC - y = 2 - y$, $NG = NM + MG = DC + LF = 2 + 2 - y = 4 - y$.

l) Continuando o processo, $PH = PO + OH = AD + NG = 2 + 4 - y = 6 - y, EI = EJ + JQ + QI = y + BA + PH = y + 2 + 6 - y = B$, logo $x = 8$.

Critérios de correção

Item a: 0,4 ponto

• lado = 2 .... 0,4 ponto

Item b: 0,6 ponto

• Provar as igualdades $AI = AH, Q\hat{A}I = P\hat{A}H$ e $A\hat{I}Q = A\hat{H}P$ (esta última podia ser indicada diretamente do fato de serem dois triângulos retângulos).. 0,2 ponto cada

Item c: 0,6 ponto

• Provar as igualdades $DH = DG, O\hat{D}H = N\hat{D}G$ e $D\hat{H}O = D\hat{G}N$ (ou apenas dizer que são triângulos retângulos) . 0,2 ponto cada

Item d: 0,6 ponto

• Provar as igualdades $BE = BF$, $J\hat{B}E = K\hat{B}F$ e $B\hat{E}J = B\hat{F}K$ (ou apenas dizer que são triângulos retângulos) ...... 0,2 ponto cada
• Se o aluno já fez o item b ou o item c completo, então ele pode citar que é análogo .... 0,6 ponto

Item e: 0,4 ponto

• Provar que $LF = 2 - y$ .... 0,2 ponto
• Provar que $NG = 4 - y$ .... +0,2 ponto

Item f: 0,4 ponto

• Provar que $PH = 6 - y$ .... 0,2 ponto
• Provar que $x = 8$ .... +0,2 ponto

PROBLEMA 4 – Nível Beta – Primos Gêmeos

Solução

a) Veja que os divisores de 40 são 1, 2, 4 ,5, 8, 10, 20 e 40. Logo $\sigma_2\,(40) = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2 + 10^2 + 20^2 + 40^2 = 1 + 4 + 16 + 25 + 64 + 100 + 400 + 1600 = 5 + 41 + 164 + 2000 = 46 + 2164 = 2210.$

b) Se $n = p\,(p+2)$, os divisores de n são $1, p, p+2$ e $p\,(p+2)$. Assim, $\sigma_2(n) = 1^2 + p^2 + (p+2)^2 + (p(p+2))^2 = 1 + p^2 + p^2 + 4p + 4 + n^2 = 5 + 2p^2 + 4p + n^2 = 5 + 2p(p+2) + n^2 = 5 + 2n + n^2.$

c) Os divisores de p^2 $são\ p^2, p\ e$ 1, logo $\sigma_2(n) = p^4 + p^2 + 1 = n^2 + n + 1.$

d) Veja que $\sigma(n) = 1 + a^2 + b^2 + n^2 + S = n^2 + 2n + 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + S = 4 + 2n \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + S = 4 \Leftrightarrow (a-b)^2 + S = 4.$

Se $S \neq 0$, devemos ter $S \geq 4$, pois aparece algum divisor maior do que 1 ao quadrado em S. Mas nesse caso $a - b = 0$, contradizendo $b > a$. Logo $S = 0$ e $(a-b)^2 = 4 \Leftrightarrow b - a = 2 \Leftrightarrow b = a + 2.$

e) Se $n = 1$, então $\sigma_2(1) = 1 \neq 1^2 + 2.1 + 5$, se $n = p$ primo, então $\sigma_2(n) = p^2 + 1 = n^2 + 1 \neq n^2 + 2n + 4$. Se $n = p^2$, já vimos no item c) que a condição não é válida. Para os outros casos, n é composto e pode ser escrito como o produto de dois números distintos $a\ e\ b$ com $1 < a < b < n$. Agora pelo item d), $a\ e\ b$ devem ser primos, pois $S = 0 \Leftrightarrow n$ só tem divisores $1, a, b\ e\ n$.
Além disso, $b - a = 2$. Para $S = 0$ temos a primo e b primo ou a primo b não primo tendo apenas a como divisor. No primeiro caso $n = ab$ com primos gêmeos e no segundo $b = a^2 = a + 2 \Rightarrow a = 2$ e $n = 2^3 = 8$.

Critérios de correção

Item a: 0,6 ponto

• Listar os divisores	0,4 ponto
• Calcular corretamente a soma dos quadrados 2210	+0,2 ponto
Outra Solução	
• Usar que $\sigma_2(40) = \sigma_2(8) \cdot \sigma_2(5)$	0,4 ponto
• Calcular corretamente $\sigma_2(40) = 85 \cdot 26 = 2210$	+0,2 ponto

Item b: 0,6 ponto

• Listar os divisores de n: $1, p, p+2$ e n	0,4 ponto
• Chegar corretamente na expressão $n^2 + 2n + 5$	+0,2 ponto

Item c: 0,6 ponto

• Listar os divisores de n: $1, p$ e n	0,4 ponto
• Chegar corretamente na expressão $n^2 + n + 1$	+0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto

• Chegar em $(a-b)^2 + S = 4$	0,4 ponto
• Provar que corretamente que $S = 0$ e $b = a + 2$	+0,2 ponto

Item e: 0,6 ponto

• Mostrar que $n = 1$, $n = p$ e $n = p^2$ não funcionam	0,2 ponto
• Além dos casos anteriores $n = ab$ e usando o item c concluir que $b = a + 2$ e $S = 0$	+0,2 ponto
• Notar que se $S = 0$, então a e $a + 2$ são primos gêmeos ou a e $a + 2$ são 2 e 4	+0,1 ponto cada

PROBLEMA 5 – Nível Beta – Mesas Cheias Beta

Solução

a) Temos a seguinte tabela preenchida.

a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
2	3	2	5	5	7	10	12

Vamos considerar as cadeiras numeradas de 1 a n. Basta escolhermos as cadeiras de modo que fiquem 1 ou 2 vazias entre quaisquer duas ocupadas consecutivas. Temos as seguintes possibilidades de mesas cheias.

- $a_6 = 5$ - {1,4}, {2,5}, {3,6}, {1,3,5} e {2,3,6}
- $a_7 = 7$ - {3,5,7}, {1,4,6}, {2,5,7}, {1,3,6}, {2,4,7}, {1,3,5} e {2,4,6}

Observe que no a_7 temos os mesmos espaços entre as cadeiras ocupadas que vão apenas rodando. Assim, podemos dizer resumidamente que é {1,4,6} e suas 6 rotações.

- $a_8 = 10$ – {1,3,5,7}, {2,4,6,8}, {1,4,7} e as 7 rotações ($2 + 8 = 10$ mesas cheias)
- $a_9 = 12$ – {1,4,7} e as 2 rotações e {1,3,5,7} e as 8 rotações ($3 + 9 = 12$ mesas cheias)

b) Usando as equações para $n = 5$, 6 e 7 temos o sistema

$$\begin{cases} 5 = 2c_1 + 3c_2 + 2c_3 \\ 5 = 5c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ 7 = 5c_1 + 5c_2 + 2c_3 \end{cases}$$

Fazendo a terceira menos a primeira temos $2 = 3c_1 + 2c_2$ e fazendo 2 vezes a segunda menos 3 vezes a primeira temos $2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = 4c_1 - 5c_2 \Leftrightarrow -5 = 4c_1 - 5c_2$. Para encontrar c_1 e c_2 temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} 2 = 3c_1 + 2c_2 \\ -5 = 4c_1 - 5c_2 \end{cases}$$

Somando 5 vezes a primeira com 2 vezes a segunda temos $0 = 23c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$. Substituindo na primeira equação chegamos em $c_2 = 1$. Finalmente, podemos substituir c_1 e c_2 no sistema inicial $5 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2c_3 \Leftrightarrow c_3 = 1$.

A recorrência seria

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$$

c) Vamos fazer três casos. Notemos que a cadeira 1 e a cadeira n não podem estar ocupadas ao mesmo tempo.

i. Se a cadeira 1 está ocupada e a cadeira $n - 1$ está ocupada.

Podemos retirar as cadeiras $n - 1$ e n e teremos uma mesa cheia com $n - 2$ cadeiras e a cadeira 1 ocupada.

ii. Se a cadeira 1 está ocupada e a cadeira $n - 2$ está ocupada.

Podemos retirar as cadeiras $n - 2$, $n - 1$ e n e teremos uma mesa cheia com $n - 3$ cadeiras e a cadeira 1 ocupada.

iii. Se a cadeira 1 está desocupada e a cadeira n está ocupada.

Podemos retirar as cadeiras $n - 1$ e n e teremos uma mesa cheia com $n - 2$ cadeiras e a cadeira 1 desocupada.

iv. Se a cadeira 1 está desocupada e a cadeira $n - 1$ está ocupada.

Podemos retirar as cadeiras $n - 2$, $n - 1$ e n e teremos uma mesa cheia com $n - 3$ cadeiras e a cadeira 1 desocupada.

Nos quatro casos podemos colocar as cadeiras retiradas fazendo o processo reverso e chegar a uma bijeção. Dessa forma, temos

$$a_n = (caso\ i + caso\ iii) + (caso\ ii + caso\ iv) = a_{n-2} + a_{n-3}$$

d) Usando a recorrência encontrada podemos calcular os termos seguintes da sequência.

a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
7	10	12	$7 + 10 = 17$	$10 + 12 = 22$	$12 + 17 = 29$	$17 + 22 = 39$	$22 + 29 = 51$	$29 + 39 = 68$	$39 + 51 = 90$	$51 + 68 = 119$

Solução

Critérios de correção

Item a: 1,2 ponto

• Valores de a_6, a_7, a_8 e a_9 .... 0,3 ponto cada

Item b: 1,2 ponto

• Valores de c_1, c_2 e c_3 .... 0,4 ponto cada

Item c: 1,0 ponto

• Fazer uma bijeção de parte das mesas cheias com n cadeiras com mesas cheias com n-2 cadeiras (mesmo que seja apenas os casos em que a cadeira 1 está ocupada).. 0,4 ponto
• Fazer uma bijeção de parte das mesas cheias com n cadeiras com mesas cheias com n-3 cadeiras (mesmo que seja apenas os casos em que a cadeira 1 está ocupada).. 0,4 ponto
• Concluir corretamente .... +0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto

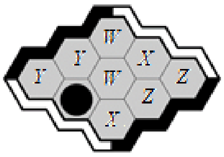
• Valores de a_{13} e a_{17} .... 0,3 ponto cada

PROBLEMA 6 – Nível Beta – Hex

Solução

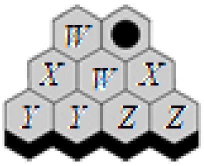
a) O segundo jogador joga em C e faz os pareamentos $\{B, D\}$ e $\{A, E\}$.

b) Considere o pareamento a seguir



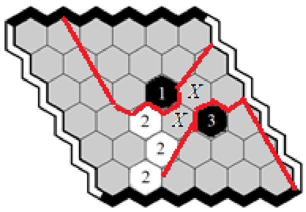
Com uma das posições Y a peça inicial já se conecta a borda preta superior. Se o primeiro jogador pegar o X inferior, então já completou o caminho. Se o primeiro pegar o X superior, então com Z ele conecta com a borda inferior e usando W conecta com a borda superior ou com a peça inicial que se conecta com a borda superior usando Y.

c) Considere o pareamento mostrado na figura.

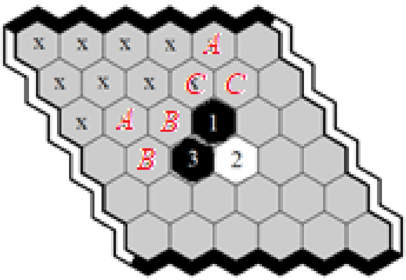


Veja que com certeza as casas X se conectam com o lado preto usando uma das casas Y ou uma das casas Z. Se o primeiro jogador pegar a casa X da direita então já temos a conexão. Se o primeiro jogador pegar a casa X da esquerda, então ele pode conectar com a peça inicial usando uma das casas W.

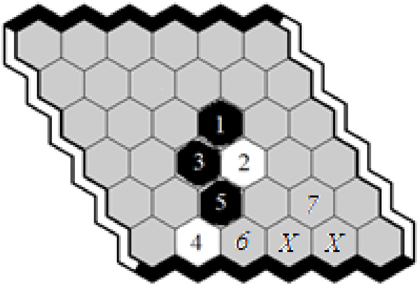
d) Podemos fazer o pareamento X para conectar 1 e 3 e fazer conexões garantidas usando $4 - 3 - 2$ do item anterior para conectar a casa 1 com a parte de cima e a casa 3 com a parte de baixo.



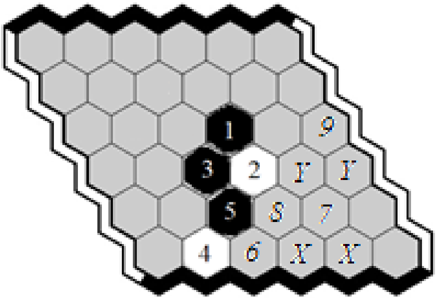
e) Considere as casas marcadas a seguir. Se o segundo jogador não jogar no A superior ou nos C's, então o primeiro pode jogar no A superior e garantir a conexão usando o pareamento C. Se o segundo jogador jogar num C, o primeiro joga no outro. Se o segundo jogador jogar no A superior, então o primeiro joga no outro A e usando o pareamento B conecta 1 e 3 com esse A. Daí, A conexão com a parte de cima é garantida por $4 - 3 - 2$.



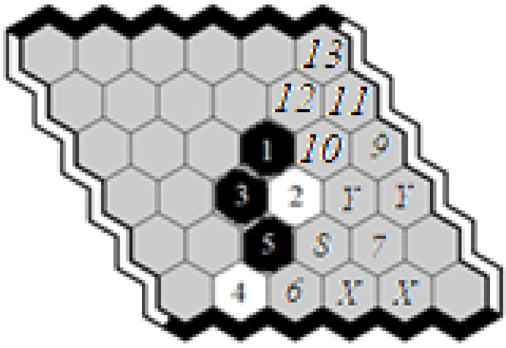
f) Para evitar que o primeiro jogador conecte a lateral inferior, o segundo jogador deve jogar 6 e o primeiro jogador responde jogando 7. Com o pareamento X a casinha 7 já está conectada com a lateral inferior.



Para evitar que conectar 5 e 7, o segundo jogador joga em 8. O primeiro joga em 9. Com o pareamento Y as casas 7 e 9 estão obrigatoriamente conectadas.



Para evitar a conexão de 1 e 9, o segundo jogador deve jogar 10. Daí o primeiro joga em 11, o segundo 12 e o primeiro em 13.



Se o jogo se desenvolver dessa forma, então 13-11-9-Y-7-X forma o caminho de cima até em baixo e o primeiro jogador vence o jogo.

Critérios de correção

Item a: 0,6 ponto

• Fazer jogada C	0,4 ponto
• Pareamentos $\{B, D\}$ e $\{A, E\}$	+0,4 ponto

Item b: 0,8 ponto

• Pareamento que funciona..	0,4 ponto
• Prova de que funciona	+0,4 ponto

Item c: 0,8 ponto

• Pareamentos que funcionam no $4-3-2$	0,6 ponto
• Prova de que funciona	+0,4 ponto

Item d: 0,6 ponto

• Usar os dois $4 - 3 - 2$ .... 0,4 ponto
• Pareamento X para conectar 1 e 3 .... 0,2 ponto

Item e: 0,6 ponto

• Estratégia correta para conectar 1 à parte de cima.. 0,6 ponto
Outra solução
• Usar o $4 - 3 - 2$ com a casa 1 (nesse caso para resolver o item f o aluno deve considerar que a casa 12 pode ter sido preenchida pelo segundo jogador).. 0,6 ponto

Item f: 0,6 ponto

A justificativa desse item pode ser dada diretamente numa figura

• Jogadas 6, 7 e pareamento X .... 0,2 ponto
• Jogadas 8, 9 e pareamento Y .... +0,2 ponto
• Jogadas 10, 11, 12 e 13.. +0,2 ponto
Outra solução
• Outra sequência completa de jogadas que garante a vitória do primeiro jogador obrigando o segundo jogador a jogar de forma específica .... 0,6 ponto

PROBLEMA 7 – Nível Beta – Fibonacci

Solução

a) Antes de começar as manipulações é importante notar que $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \cdot \beta = -1$ e $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$. Vamos usar a fórmula de Binet em F_{n+1} e F_{n-1}:

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \left(\alpha^{2n} + \beta^{2n} - (\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2 + \beta^2)\right)$$

Veja que $-(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2 + \beta^2) = (-1)^n(5 - 2) = 5(-1)^n - 2(\alpha\beta)^n$. Assim, chegamos em

$$F_{n+1}F_{n-1} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 (\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + 5(-1)^n) = F_n^2 + (-1)^n$$

b) Usando a ideia do item anterior basta manipular o produto $F_{n+2}F_{n-2}$.

$$F_{n+2} \cdot F_{n-2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 (\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \left(\alpha^{2n} + \beta^{2n} - (\alpha\beta)^{n-2}(\alpha^4 + \beta^4)\right)$$

Veja que $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = 3^2 - 2 = 7$. Usando também que $(\alpha\beta)^n = (\alpha\beta)^{n-2}$ podemos concluir que

$$-(\alpha\beta)^{n-2}(\alpha^4 + \beta^4) = -2(\alpha\beta)^n - 5(\alpha\beta)^n$$

e

$$F_{n+2}F_{n-2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \left(\alpha^{2n} + \beta^{2n} - (\alpha\beta)^{n-2}(\alpha^4 + \beta^4)\right) = F_n^2 + (-1)^n$$

Usando produtos notáveis

$$F_{n+2}F_{n+1}F_{n-1}F_{n-1} = (F_n^2 - (-1)^n)(F_n^2 + (-1)^n) = F_n^4 - (-1)^{2n} = F_n^4 - 1$$

c) Precisaremos da seguinte equação envolvendo os números de Fibonacci.

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}, \forall m, n \geq 1$$

Isso pode ser citado como fato conhecido. Há várias demonstrações inclusive uma usando bijeção com dominós como mostrado na OPM 2021. Vamos fazer uma prova por indução em n.

Para $n = 1$ e $n = 2$ temos

$$F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_mF_2 = F_{m-1} + F_m$$
$$F_{m+2} = F_{m-1}F_2 + F_mF_3 = F_{m-1} + F_m + F_m = F_{m+1} + F_m$$

Se o resultado vale para $n = k - 1$ e $n = k$, então valem as seguintes duas equações

$$F_{m+k-1} = F_{m-1}F_{k-1} + F_mF_k$$
$$F_{m+k} = F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1}$$

Somando as duas

$$(F_{m+k-1} + F_{m+k}) = F_{m-1}(F_{k-1} + F_k) + F_m(F_k + F_{k+1})$$
$$\Rightarrow F_{m+k+1} = F_{m-1}F_{k+1} + F_mF_{k+2}$$

Partindo para a equação

$$b_n = a_n + b_{n+1} \Leftrightarrow \frac{F_{n+2}}{F_n} = \frac{F_{2n+3}}{F_nF_{n+3}} + \frac{F_{n+1}}{F_{n+3}}$$

Vamos substituir F_{2n+3} usando $m = n + 3$ e obter $F_{2n+3} = F_{n+2}F_n + F_{n+3}F_{n+1}$. Temos que provar que

$$\frac{F_{n+2}}{F_n} = \frac{F_{n+2}F_n + F_{n+3}F_{n+1} + F_{n+1}F_n}{F_nF_{n+3}}$$

Ela é verdadeira, pois $F_{n+2}F_n + F_{n+3}F_{n+1} + F_{n+1}F_n = (F_{n+2} + F_{n+1})F_n + F_{n+3}F_{n+1} = F_{n+3}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+3}F_{n+2}$. Cancelando o F_{n+3} no numerador e no denominador chegamos na expressão do lado esquerdo.

d) Usando a expressão do item c para $n = 1$ temos

$$b_1 = a_1 + \frac{1}{b_2}$$

Substituindo b_2 usando $n = 2$ no item c temos

$$b_1 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{b_3}}$$

Daí basta seguir substituindo para $n = 3,4, \ldots$

$$b_1 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{b_4}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

e) Substituindo os números de Fibonacci na equação do item d temos

$$\frac{F_3}{F_1} = \frac{F_5}{F_1F_4} + \cfrac{1}{\cfrac{F_7}{F_2F_5} + \cfrac{1}{\cfrac{F_9}{F_3F_6} + \cfrac{1}{\ddots}}} \Leftrightarrow \cfrac{1}{\cfrac{F_7}{F_2F_5} + \cfrac{1}{\cfrac{F_9}{F_3F_6} + \cfrac{1}{\ddots}}} = \frac{2}{1} - \frac{5}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

Agora vamos usar a equação do item b para manipular a expressão E dada

$$E = \cfrac{F_3^4 - 1}{F_7 + \cfrac{F_4^4 - 1}{F_9 + \cfrac{F_5^4 - 1}{F_{11} + \cfrac{F_6^4 - 1}{\ddots}}}} = \cfrac{F_1F_2F_4F_5}{F_7 + \cfrac{F_2F_3F_5F_6}{F_9 + \cfrac{F_3F_4F_6F_7}{F_{11} + \cfrac{F_4F_5F_7F_8}{\ddots}}}}$$

Podemos dividir o numerador e o denominador da primeira fração por F_2F_5. Depois dividir numerador e denominador da segunda fração por F_3F_6 e seguir assim por diante para obter.

$$E = \cfrac{F_1F_4}{\cfrac{F_7}{F_2F_5} + \cfrac{F_3F_6}{F_9 + \cfrac{F_3F_4F_6F_7}{F_{11} + \cfrac{F_4F_5F_7F_8}{\ddots}}}} = \cfrac{F_1F_4}{\cfrac{F_7}{F_2F_5} + \cfrac{1}{\cfrac{F_9}{F_3F_6} + \cfrac{F_4F_7}{F_{11} + \cfrac{F_4F_5F_7F_8}{\ddots}}}} = \cfrac{F_1F_4}{\cfrac{F_7}{F_2F_5} + \cfrac{1}{\cfrac{F_9}{F_3F_6} + \cfrac{1}{\cfrac{F_{11}}{F_4F_7} + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Lembrando que $F_1F_4 = 1 \cdot 3 = 3$ temos

$$E = 3 \cdot \cfrac{1}{\cfrac{F_7}{F_2F_5} + \cfrac{1}{\cfrac{F_9}{F_3F_6} + \cfrac{1}{\ddots}}} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Critérios de correção

Item a: 1,0 ponto

• Expressões $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \cdot \beta = -1$ e $\alpha^2 + \beta^2 = 3$.	0,2 ponto cada
• Usar a fórmula de Binet uma ou mais vezes na equação	0,2 ponto
• Concluir a demonstração	+0,2 ponto

Item b: 1,0 ponto

• Provar que $\alpha^4 + \beta^4 = 7$	0,4 ponto
• Provar que $F_{n+2}F_{n-2} = F_n^2 + (-1)^n$	+0,4 ponto
• Concluir a demonstração de que $F_{n+2}F_{n+1}F_{n-1}F_{n-2} = F_n^4 - 1$	+0,2 ponto

Item c: 1,0 ponto

• Citar (com ou sem demonstração) a equação $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$	0,4 ponto
• Transformar a equação de a_n e b_n numa equação equivalente com os números de Fibonacci	0,4 ponto
• Demonstrar que a equação com os números de Fibonacci é verdadeira	+0,2 ponto

Item d: 0,8 ponto

• Juntar as expressões do item c para $n = 1$ e $n = 2$	0,4 ponto
• Concluir a forma infinita	+0,4 ponto

Item e: 1,2 ponto

• Escrever a equação do item d usando os números de Fibonacci	0,4 ponto
• Substituir $F_n^4 - 1$ usando a equação do item b	0,4 ponto
• Concluir corretamente que a expressão é igual a 1	+0,4 ponto

XLVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (outubro de 2022)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

PROBLEMA 1 – Nível Gama – Esperança Pitagórica Gama

Solução

a) % de vitórias = $\frac{636^2}{636^2+688^2}$ ⇒ número esperado de vitórias = $\frac{636^2}{636^2+688^2}\cdot 162 \cong$ 77 Jogos

b) Sejam CF = corridas feitas, CS = corridas sofridas. Então

$$\frac{\mathrm{CF}^2}{\mathrm{CF}^2+CS^2}=0{,}64 \Leftrightarrow 0{,}36\cdot \mathrm{CF}^2=0{,}64\cdot \mathrm{CS}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CS}}\right)^2=\left(\frac{0{,}8}{0{,}6}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CS}}=\frac{4}{3}$$

c) Note que $\frac{corridas\ feitas + corridas\ sofridas}{Jogos}$ é a média de corridas feitas e sofridas por um time em toda a temporada. Como o número total de corridas feitas é igual ao de corridas sofridas, tanto a média de corridas feitas por jogo por um time quanto tal média para as sofridas devem ser substituídas pelo valor na tabela no ano sofrido, isto é:

$$\text{Expoente} = 1{,}50\cdot\log_{10}\left(\frac{corridas\ feitas}{Jogos}+\frac{corridas\ sofridas}{Jogos}\right)+0{,}45$$
$$=1{,}50\cdot\log_{10}(4{,}53+4{,}53)+0{,}45$$
$$\cong 1{,}50\cdot(2\log_{10}3)+0{,}45$$
$$\cong 3\cdot 0{,}48+0{,}45=1{,}89$$

d) Como argumentado, o valor $\frac{corridas\ feitas + corridas\ sofridas}{Jogos}$ deve ser substituído, para o cálculo de um expoente comum a todas as equipes, como o dobro da média de corridas por jogo por time na temporada.

Empiricamente, essa média é sempre inferior a 5. Dessa forma, com log 10^x é crescente em $(0+\ \infty)$

$$\text{Expoente} = 1{,}50\,.\log_{10}\left(\frac{\text{corridas feitas}}{\text{jogos}}+\frac{\text{corridas sofridas}}{\text{jogos}}\right)+0{,}43$$

$=1{,}50\cdot\log_{10}(5+5)+0{,}45=1{,}50\cdot\log_{10}10+0{,}45=1{,}50+0{,}45=1{,}95<2$, como queríamos

Critérios de correção

Item a: 0,5 ponto

• Determinar o número de vitórias .... 0,5 ponto

Item b: 0,5 ponto

• Escrever fórmula usando a razão. .... 0,3 ponto
• Aplicar corretamente .... +0,2 ponto

Item c: 0,5 ponto

• Argumento completo .... 0,5 ponto

Item d: 0,5 ponto

• Argumento completo .... 0,5 ponto

PROBLEMA 2 – Nível Gama – Heptágono

Solução

a) Os triângulos isósceles ΔFGA e ΔGAB são congruentes porque têm mesmo ângulo de vértice e lados comuns de tamanho 1. Logo, FA = GB. Como também FG = AB e FB é lado comum, os triângulos ΔGFB e ΔABF são congruentes pelo caso (LLL). Daí $A\hat{B}F = G\hat{F}B = \theta$, e sendo $F\hat{G}A = G\hat{A}B = \gamma$, $\theta + \theta + \gamma + \gamma = 360°$ (No quadrilátero $FGAB$) implica $\theta + \gamma = 180° \Leftrightarrow AG \parallel BF$.

b) Da mesma forma que no item a, pede-se para que GABC é trapézio. Portanto, ABPG tem lados opostos paralelos ⇒ é paralelogramo ⇒ tem lados opostos congruentes. Além disso, $GA = 1 = AB$, logo, de fato $PG = AB = GA = BP$.

c) $G\hat{F}B = \pi - F\hat{G}A = \pi - \frac{(7-2)\,\pi}{7} = \pi - \frac{5\,\pi}{7} = \frac{2\,\pi}{7}$

$G\hat{P}F = \pi - G\hat{P}B = \pi - G\hat{A}B = \pi - \frac{(7-2)\,\pi}{7} = \pi - \frac{5\,\pi}{7} = \frac{2\,\pi}{7}$.

Usamos numa das passagens que ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

d) No triângulo ΔFGP isósceles de vértice G (pois $G\hat{F}P = G\hat{F}B = G\hat{P}F$), seja M o ponto médio / pé da altura de G em BC. Usando o triângulo retângulo FMG temos $FP = 2.FM = 2.\left(1\cos\frac{2\pi}{7}\right) = 2\,cos\frac{2\pi}{7}$

e) Pela lei dos cossenos em ΔPFE:

$$PE^2 = EF^2 + PF^2 - 2\,.EF\,.PF.\cos\left(\frac{5\pi}{7} - G\hat{F}B\right) = 1 + 4\,cos^2\,\frac{2\pi}{7} - 2\,.\,1\,.\,2\,cos\,\frac{2\pi}{7}\,.cos\,\frac{3\pi}{7}$$

$$= 1 - 4\,cos\,\frac{2\pi}{7}\left(cos\,\frac{3\pi}{7} - cos\,\frac{2\pi}{7}\right) = 1 - 4\,cos\,\frac{2\pi}{7}\left(cos\,\frac{3\pi}{7} + cos\,\frac{5\pi}{7}\right)$$

$$= 1 - 4\cos\frac{2\pi}{7}\left(2.cos\left(\frac{4\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{-\pi}{7}\right)\right) \Rightarrow PE^2 = 1 - 8\cos\frac{\pi}{7}\,.\cos\frac{2\pi}{7}\,.\cos\frac{4\pi}{7}$$

f) $\cos\,\frac{\pi}{7}\,.\cos\,\frac{2\pi}{7}\,.\cos\,\frac{4\pi}{7} = \frac{\left(2\,.\text{sen}\,\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\right)\cos\frac{2\pi}{7}\,.\cos\frac{4\pi}{7}}{2.\text{sen}\,\frac{\pi}{7}} - \frac{\left(2\,.\text{sen}\frac{2\pi}{7}\,.\,\cos\frac{2\pi}{7}\right)\cos\frac{4\pi}{7}}{2\,.\,2.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{7}} = \frac{\left(2\,.\text{sen}\frac{4\pi}{7}\,.\,\cos\frac{4\pi}{7}\right)}{2\,.\,2\,.\,2.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{7}} = \frac{\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{8\,.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{7}} = \frac{-\,\text{sen}\,\frac{\pi}{7}}{8\,.\,\text{sen}\,\frac{\pi}{7}} =$

$-\frac{1}{8} \Rightarrow \text{PE} = \sqrt{1 - 8.\left(-\frac{1}{8}\right)} \rightarrow \text{PE} = \sqrt{2}$

Critérios de correção

Item a: 0,3 ponto

• Argumento completo	0,3 ponto

Item b: 0,3 ponto

• Usar o item a para argumentar que os lados opostos são paralelos.	0,2 ponto
• Concluir corretamente	+0,1 ponto

Item c: 0,3 ponto

• A medida de apenas um dos ângulos.	0,2 ponto
• As duas medidas	+0,1 ponto

Item d: 0,3 ponto

• Argumento completo	0,3 ponto

Item e: 0,4 ponto

• Usar a lei dos cossenos no triângulo PFE	0,2 ponto
• Concluir corretamente a expressão de PE^2	+0,2 ponto

Item f: 0,4 ponto

• Usar pelo menos uma vez corretamente o $\text{sen}\,2x$.	0,2 ponto
• Concluir corretamente o valor de PE	+0,2 ponto

PROBLEMA 3 – Nível Gama – Farkle

Solução

a) Para lançar um Farkle com 1 dado, esse dado deverá ser diferente de 1 e 5, portanto $p_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Para lançar um Farkle com 2 dados, ambos devem ser diferentes de 1 e 5, portanto $p_2 = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Para lançar um Farkle com 3 dados, devemos ter todos diferentes de 1 e 5 e excluir o caso em que os três são iguais formando um terno de x’s. Logo, $p_3 = \left(\frac{4}{6}\right)^3 - \frac{4}{6^3} = \frac{4^3-4}{6^3} = \frac{60}{6\cdot 36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Para lançar um Farkle com 6 dados, devemos ter todos diferentes de 1 e 5, nenhum aparecendo 3 vezes ou mais e não ter 3 pares. Para isso devemos ter os números 2, 3, 4 e 6 com 2 aparecendo 2 vezes e 2 aparecendo 1 vez. São $\binom{4}{2} = 6$ maneiras de escolher os dois que aparecerão 2 vezes e $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 180$ maneiras de ordenar os resultados. Logo, $p_6 = \frac{6\cdot 180}{6^6} = \frac{5}{216}$.

b) Segue a tabela preenchida.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	$T+200$	$T+100$	$T+100$	$T+100$	$T+150$	$T+100$
⚁	$T+100$	0	0	0	$T+50$	0
⚂	$T+100$	0	0	0	$T+50$	0
⚃	$T+100$	0	0	0	$T+50$	0
⚄	$T+150$	$T+50$	$T+50$	$T+50$	$T+100$	$T+50$
⚅	$T+100$	0	0	0	$T+50$	0

c) Cada par de resultados na tabela tem probabilidade $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$ de acontecer. Assim, $E(X) = \frac{1}{36}$(soma da tabela). Tomando os valores temos

$$E(X) = \frac{1}{36}\big(T + 200 + 2(T + 150) + 9(T + 100) + 8(T + 50)\big) = \frac{1}{36}(20T + 1800)$$

d) Temos $E(X) = T \Leftrightarrow 20T + 1800 = 36T \Leftrightarrow T = \frac{1800}{16} = 112{,}5$.

e) O valor esperado é uma média de quantos podemos ganhar. Veja que $E(X) > T \Leftrightarrow E(X) - T > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{36}(1800 - 16T) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{36\cdot 16}(112{,}5 - T) > 0$.

- Se $T > 112{,}5$, então o valor esperado ao jogar é menor que T e o conselho para o jogador é parar.
- Se $T < 112{,}5$, então o valor esperado é maior que T e o jogador deve jogar mais uma vez.

Critérios de correção

Item a: 0,8 ponto

• Expressão de probabilidade p_n .... 0,2 ponto cada

Item b: 0,6 ponto

• Preencher ou argumentar que fora das linhas e colunas de 1 e 5 são todos 0 (zero) .... 0,3 ponto
• Preencher os demais corretamente .... +0,3 ponto

Item c: 0,6 ponto

• Escrever ou argumentar que $E(X)$ é 1/36 da soma das expressões na tabela .... 0,3 ponto
• Expressão correta .... +0,3 ponto

Item d: 0,4 ponto

• Valor correto de $T = 112{,}5$ .... 0,4 ponto

Item e: 0,6 ponto

• Decisão envolvendo valor esperado $E(X)$ .... 0,3 ponto
• Concluir corretamente que o jogador deve jogar novamente se, e somente se, $T < 112{,}5$ .... +0,3 ponto

PROBLEMA 4 – Nível Gama – Diofantina com Exponenciais

Solução

a) Substituindo os valores temos

$$z^z = (12^6)^{12^6} \cdot (6^8)^{6^8} = 2^{12\cdot 12^6} \cdot 3^{6\cdot 12^6} \cdot 2^{8\cdot 6^8} \cdot 3^{8\cdot 6^8} = 2^{12\cdot 12^6 + 8\cdot 6^8} \cdot 3^{6\cdot 12^6 + 8\cdot 6^8}$$

Podemos concluir que z possui fatores 2 e 3. Podemos escrever $z = 2^a \cdot 3^b$ e $z^z = 2^{az} \cdot 3^{bz} = 2^{a\cdot 2^a \cdot 3^b} \cdot 3^{b\cdot 2^a \cdot 3^b}$. Dessa forma, temos as equações

$$a \cdot 2^a \cdot 3^b = 12 \cdot 12^6 + 8 \cdot 6^8 = 6^7(2 \cdot 2^6 + 8 \cdot 6) = 6^7 \cdot 176$$

$$b \cdot 2^a \cdot 3^b = 6 \cdot 12^6 + 8 \cdot 6^8 = 6^7(2^6 + 8 \cdot 6) = 6^7 \cdot 112$$

Dividindo as duas equações temos $\frac{a}{b} = \frac{176}{112} = \frac{11}{7}$. Fazendo $a = 11k$ e $b = 7k$ para um inteiro k temos

$$11k \cdot 2^{11k} \cdot 3^{7k} = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 11 \cdot 2^4 \Leftrightarrow k = 1.$$

Portanto, $z = 2^{11} \cdot 3^7$.

b) Novamente z possui apenas fatores 2 e 3 e podemos escrever $z = 2^a \cdot 3^b$. Substituindo os valores de x, y e w temos

$$w^w \cdot x^x \cdot y^y = 2^{6w+5x+4y} \cdot 3^{12w+13x+14y}$$

Com isso,

$$a \cdot 2^a \cdot 3^b = 6w + 5x + 4y = 3^{12} \cdot 2^4(6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3^2) = 3^{12} \cdot 2^4 \cdot 90$$

$$b \cdot 2^a \cdot 3^b = 12w + 13x + 14y = 3^{12} \cdot 2^4(12 \cdot 4 + 13 \cdot 3 \cdot 2 + 14 \cdot 3^2) = 3^{12} \cdot 2^4 \cdot 252$$

Dividindo as duas equações $\frac{a}{b} = \frac{90}{252} = \frac{5}{14}$. Usando $a = 5k$ e $b = 14k$ para um inteiro k temos

$$5k \cdot 2^{5k} \cdot 3^{14k} = 3^{12} \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot 2^1 \cdot 3^2 \Leftrightarrow k = 1$$

Portanto, $z = 2^5 \cdot 3^{14}$.

c) Comparando os expoentes de $k^n - 1$ nos dois lados da equação $x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \cdot ... x_k^{x_k} = z^z$ temos

$$2(k^n - 1)x_1 + (2(k^n - 1) + 2)x_2 + \cdots + (2(k^n - 1) + 1)x_k = M \cdot z$$

Podemos dividir z e cada x_i por $k^{k^n(k^{n+1}-2n-k)} \cdot (k^n - 1)^{2(k^n-1)}$. Nesse passo poderia acontecer do lado direito ficar com expoente negativo no $k^n - 1$, mas isso não nos impediria de resolver a equação.

$$2(k^n - 1)k^{2n} + (2(k^n - 1) + 2)(k^n - 1)^2 + (k - 2)(2(k^n - 1) + 1)(k^n)(k^n - 1) = M \cdot k^{n+1} \cdot (k^n - 1)^{M-2(k^n-1)}$$

Veja que a segunda parcela é $(2k^n)(k^n - 1)^2$ e podemos dividiu tudo por $k^n(k^n - 1)$ obtendo

$$2k^n + 2(k^n - 1) + (k - 2)(2k^n - 1) = M \cdot k \cdot (k^n - 1)^{M-2(k^n-1)-1}$$

A soma dos dois primeiros termos é $2(2k^n - 1)$ e cancelando com o -2 temos

$$k(2k^n - 1) = M \cdot k \cdot (k^n - 1)^{M-2(k^n-1)-1}$$

Chegamos assim na solução $M = 2k^n - 1 = 2(k^n - 1) + 1$ que iguala o valor do lado esquerdo e zera o expoente da expressão do lado direito.

d) Podemos usar as equações dadas com $k = 3$ e n qualquer.

Critérios de correção

Item a: 0,8 ponto

• Fatoração em primos de x, de y ou de ambos	0,4 ponto
• Fatoração em primos de z	+0,4 ponto

Item b: 0,8 ponto

• Expressão correta para z	0,4 ponto
• Provar que $w < x < y$	+0,2 ponto
• Provar que $y < z$	+0,2 ponto

Item c: 0,8 ponto

• Escrever uma equação que permita calcular o M	0,4 ponto
• Determinar o valor correto de M	+0,4 ponto

Item d: 0,6 ponto

• Tentar usar ou pelo menos citar $k = 3$	0,3 ponto
• Argumento completo usando $k = 3$ e variando o valor de n	+0,3 ponto

PROBLEMA 5 – Nível Gama – Mesas Cheias Gama

Solução

a) Temos a seguinte tabela preenchida.

a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
2	3	2	5	5	7	10	12

Vamos considerar as cadeiras numeradas de 1 a n. Basta escolhermos as cadeiras de modo que fiquem 1 ou 2 vazias entre quaisquer duas ocupadas consecutivas. Temos as seguintes possibilidades de mesas cheias.

- $a_6 = 5$ - {1,4}, {2,5}, {3,6}, {1,3,5} e {2,3,6}
- $a_7 = 7$ - {3,5,7}, {1,4,6}, {2,5,7}, {1,3,6}, {2,4,7}, {1,3,5} e {2,4,6}

Observe que no a_7 temos os mesmos espaços entre as cadeiras ocupadas que vão apenas rodando. Assim, podemos dizer resumidamente que é {1,4,6} e suas 6 rotações.

- $a_8 = 10$ – {1,3,5,7}, {2,4,6,8}, {1,4,7} e as 7 rotações ($2 + 8 = 10$ mesas cheias)
- $a_9 = 12$ – {1,4,7} e as 2 rotações e {1,3,5,7} e as 8 rotações ($3 + 9 = 12$ mesas cheias)

b) Usando as equações para $n = 5$, 6 e 7 temos o sistema

$$\begin{cases} 5 = 2c_1 + 3c_2 + 2c_3 \\ 5 = 5c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ 7 = 5c_1 + 5c_2 + 2c_3 \end{cases}$$

Fazendo a terceira menos a primeira temos $2 = 3c_1 + 2c_2$ e fazendo 2 vezes a segunda menos 3 vezes a primeira temos $2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = 4c_1 - 5c_2 \Leftrightarrow -5 = 4c_1 - 5c_2$. Para encontrar c_1 e c_2 temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} 2 = 3c_1 + 2c_2 \\ -5 = 4c_1 - 5c_2 \end{cases}$$

Somando 5 vezes a primeira com 2 vezes a segunda temos $0 = 23c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$. Substituindo na primeira equação chegamos em $c_2 = 1$. Finalmente, podemos substituir c_1 e c_2 no sistema inicial $5 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2c_3 \Leftrightarrow c_3 = 1$.

A recorrência seria

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$$

c) Vamos fazer três casos. Notemos que a cadeira 1 e a cadeira n não podem estar ocupadas ao mesmo tempo.

i. Se a cadeira 1 está ocupada e a cadeira $n - 1$ está ocupada.

Podemos retirar as cadeiras $n - 1$ e n e teremos uma mesa cheia com $n - 2$ cadeiras e a cadeira 1 ocupada.

ii. Se a cadeira 1 está ocupada e a cadeira $n - 2$ está ocupada.

Podemos retirar as cadeiras $n - 2$, $n - 1$ e n e teremos uma mesa cheia com $n - 3$ cadeiras e a cadeira 1 ocupada.

iii. Se a cadeira 1 está desocupada e a cadeira n está ocupada.

Podemos retirar as cadeiras $n - 1$ e n e teremos uma mesa cheia com $n - 2$ cadeiras e a cadeira 1 desocupada.

iv. Se a cadeira 1 está desocupada e a cadeira $n - 1$ está ocupada.

Podemos retirar as cadeiras $n - 2$, $n - 1$ e n e teremos uma mesa cheia com $n - 3$ cadeiras e a cadeira 1 desocupada.

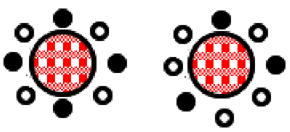
Nos quatro casos podemos colocar as cadeiras retiradas fazendo o processo reverso e chegar a uma bijeção. Dessa forma, temos

$$a_n = (caso\ i + caso\ iii) + (caso\ ii + caso\ iv) = a_{n-2} + a_{n-3}$$

d) Usando a recorrência encontrada podemos calcular os termos seguintes da sequência.

a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
7	10	12	$7 + 10 = 17$	$10 + 12 = 22$	$12 + 17 = 29$	$17 + 22 = 39$	$22 + 29 = 51$	$29 + 39 = 68$	$39 + 51 = 90$	$51 + 68 = 119$

e) Como vimos no item a há duas classes de equivalências para 8 cadeiras representadas por {1,3,5,7} e {1,4,7}. As figuras a seguir mostram essas classes. A primeira pode ser rotacionadas 1 vez e a segunda 7 vezes. Por isso, $a_8 = 2 + 8 = 10$.



f) Ao rotacionar apenas uma cadeira os espaços entre duas cadeiras consecutivas ocupadas seguem sendo os mesmos (1 ou 2 cadeiras) e, portanto, continua sendo uma mesa cheia com a mesma quantidade de cadeiras ocupadas. Vale lembrar que não tem como chegarmos na mesma mesa cheia, pois a primeira cadeira ocupada muda de lugar.

g) Se fizermos p rotações de uma cadeira teremos p mesas cheias distintas que são rotacionalmente equivalentes.

Suponha que não e que temos duas mesas cheias iguais após t rotações com $1 \leq t < p$ de uma para a outra. Mas isso implica que a cadeira 1 tem o mesmo estado (ocupada ou desocupada) da cadeira $1 + t$ e esta tem o mesmo estado da cadeira $1 + 2t$ e assim por diante considerando $1 + nt$ módulo p. Porém, $1 + nt$ será um conjunto completo de resíduos módulo p para p primo e todas as cadeiras teriam o mesmo estado. Isto é um absurdo.

Logo, as a_p mesas cheias podem ser agrupadas em classes de equivalência com p mesas cheias em cada classe e podemos concluir que $a_p = p \cdot (número\ de\ classes\ de\ equivalência)$ e a_p é múltiplo de p.

Critérios de correção

Item a: 0,8 ponto

• Valores de a_6, a_7, a_8 e a_9 .... 0,2 ponto cada

Item b: 0,6 ponto

• Valores de c_1, c_2 e c_3 .... 0,2 ponto cada

Item c: 0,8 ponto

• Fazer uma bijeção de parte das mesas cheias com n cadeiras com mesas cheias com n-2 cadeiras (mesmo que seja apenas os casos em que a cadeira 1 está ocupada).. 0,3 ponto • Fazer uma bijeção de parte das mesas cheias com n cadeiras com mesas cheias com n-3 cadeiras (mesmo que seja apenas os casos em que a cadeira 1 está ocupada).. 0,3 ponto • Concluir corretamente .... +0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto

• Valores de a_{13} e a_{17} .... 0,3 ponto cada

Item e: 0,4 ponto

• Classes de equivalência corretas com figura ou listando .... 0,2 ponto cada • Classe de equivalência errada ou repetir achando que é diferente..-0,1 ponto cada

Item f: 0,4 ponto

• Explicação correta de que se rotacionar uma unidade os espaços entre cadeiras ocupadas continuam os mesmos .... 0,4 ponto

Item g: 0,4 ponto

• Afirmação sem prova correta de que cada classe de equivalência possui p mesas cheias.. 0,2 ponto • Prova de que para cada t, com $1 \leq t < p$, a rotação de k cadeiras gera uma mesa cheia diferente .... +0,2 ponto

PROBLEMA 6 – Nível Gama – Estrela de Davi

Solução

a) Substituindo as expressões temos

$$B_1 \cdot B_3 \cdot B_5 = B_2 \cdot B_4 \cdot B_6$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!}$$

Nos numeradores temos $(n-1)!$, $n!$ e $(n+1)!$ e nos denominadores $(k-1)!$, $k!$, $(k+1)!$, $(n-k-1)!$, $(n-k)!$ e $(n-k+1)!$. A ordem dos fatores não altera o resultado e temos a igualdade.

b) Se $v_p(x) < v_p(y)$, então podemos escrever $x = p^{v_p(x)}x_0$ e $y = p^{v_p(x)+1}y_0$ com $p \nmid x_0$. Assim, $x + y = p^{v_p(x)}(x_0 + py_0)$, $p \nmid x_0 + py_0$ e $v_p(x+y) = v_p(x)$.

Se $v_p(x) = v_p(y)$, então escrever $x = p^{v_p(x)}x_0$ e $y = p^{v_p(x)}y_0$ com $p \nmid x_0$ e $p \nmid y_0$. Temos $x + y = p^{v_p(x)}(x_0 + y_0)$ e podemos concluir que $v_p(x+y) = v_p(x) + v_p(x_0 + y_0) \geq v_p(x)$.

c) Essa equação segue da igualdade do item a considerando a quantidade de fatores p de cada lado da equação.

d) Pela relação de Stifel, temos $B_1 + B_2 = B_0$. Usando o item b, se $e_1 < e_2$, então $e_1 = e_0$.

e) Usando a relação de Stifel e o item b duas vezes temos

- $B_0 + B_3 = B_4$ e $e_0 < e_4 \Rightarrow e_0 = e_3$
- $B_0 + B_6 = B_5$ e $e_0 < e_6 \Rightarrow e_0 = e_5$.

f) Usando os itens anteriores temos

$$e_1 + e_3 + e_5 = e_2 + e_4 + e_6 > e_1 + e_1 + e_1 = e_1 + e_3 + e_5$$

Gerando uma contradição. Portanto, a suposição do item d é falsa e $e_1 \geq \min(e_2, e_4, e_6)$.

g) O que fizemos para e_1 pode ser feito para cada e_i e temos

$$\min(e_1, e_3, e_5) \geq \min(e_2, e_4, e_6) \geq \min(e_1, e_3, e_5) \Rightarrow \min(e_1, e_3, e_5) = \min(e_2, e_4, e_6)$$

Esses mínimos são os expoentes de p em $mdc(B_1, B_3, B_5)$ e $mdc(B_2, B_4, B_6)$. Considerando que vale para todo primo p podemos concluir que $mdc(B_1, B_3, B_5) = mdc(B_2, B_4, B_6)$.

Critérios de correção

Item a: 0,4 ponto

• Escrever as fórmulas ou indicar que todos os fatoriais aparecem nos dois lados da equação .... 0,4 ponto

Item b: 0,6 ponto

• Para $v_p(x) < v_p(y)$ provar que $v_p(x+y) = v_p(x)$ usando $x + y = p^{v_p(x)}(x_0 + py_0)$ ou equivalente .... 0,3 ponto
• Para $v_p(x) = v_p(y)$ provar que $v_p(x+y) \geq v_p(x)$ usando $x + y = p^{v_p(x)}(x_0 + y_0)$ ou equivalente .... 0,3 ponto

Item c: 0,4 ponto

• Afirmar que segue da equação do item a ou argumento equivalente.. 0,4 ponto

Item d: 0,8 ponto

• Perceber que $B_1 + B_2 = B_0$ .... 0,4 ponto
• Usar o resultado do item b para concluir que $e_1 < e_2 \Rightarrow e_1 = e_0$ .... +0,4 ponto

Item e: 0,8 ponto

• Perceber que $B_0 + B_3 = B_4$ e $e_0 < e_4 \Rightarrow e_0 = e_3$ .... 0,4 ponto
• Perceber que $B_0 + B_6 = B_5$ e $e_0 < e_6 \Rightarrow e_0 = e_5$... 0,4 ponto

Item f: 0,4 ponto

• A partir dos itens anteriores concluir que $e_1 + e_3 + e_5 = e_2 + e_4 + e_6 > e_1 + e_1 + e_1 = e_1 + e_3 + e_5$........................... 0,3 ponto • Com a contradição concluir que $e_1 \geq \min(e_2, e_4, e_6)$... 0,3 ponto

Item g: 0,6 ponto

• Afirmar que o que fizemos para e_1 pode ser feito para e_i .... 0,2 ponto • Provar que $\min(e_1, e_3, e_5) = \min(e_2, e_4, e_6)$.. +0,2 ponto • Concluir que se isso vale para todo p, então $mdc(B_1, B_3, B_5) = mdc(B_2, B_4, B_6)$.. +0,2 ponto

PROBLEMA 7 – Nível Gama – Tetraedro e Vetores

Solução

a) A soma dos vetores pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}$$

Usando as propriedades do produto vetorial

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}\times\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}\right)+\overrightarrow{AD}\times\ \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{BC}\right)=\vec{0}$$

b) Seja H a altura de A até a base BCD. Usando o triângulo retângulo com vértices A, B e a projeção de A sobre BCD temos $H=AB\cdot\cos\theta$, em que θ é o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{S_{BCD}}$. Dessa forma,

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{S_{BCD}}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{S_{BCD}}=-AB\cdot\left|\overrightarrow{S_{BCD}}\right|\cdot\cos\theta=-H\cdot\left|\overrightarrow{S_{BCD}}\right|=-3\cdot\left(\frac{\left|\overrightarrow{S_{BCD}}\right|\cdot H}{3}\right)=-3V$$

c) Usaremos as coordenadas $\overrightarrow{AB}=(x_{AB},y_{AB},z_{AB})$ e seus análogos.

$$\det M=\begin{vmatrix}x_{AB}&x_{AC}&x_{AD}\\y_{AB}&y_{AC}&y_{AD}\\z_{AB}&z_{AC}&z_{AD}\end{vmatrix}$$

Usando Laplace na primeira coluna temos

$$\det M=x_{AB}\begin{vmatrix}y_{AC}&y_{AD}\\z_{AC}&z_{AD}\end{vmatrix}+y_{AB}\left(-\begin{vmatrix}x_{AC}&x_{AD}\\z_{AC}&z_{AD}\end{vmatrix}\right)+z_{AB}\begin{vmatrix}x_{AC}&x_{AD}\\y_{AC}&y_{AD}\end{vmatrix}$$

$$\det M=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{2S_{ACD}}=2\cdot3\cdot\left(\frac{\left|\overrightarrow{S_{ACD}}\right|\cdot AB\cdot\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{S_{ACD}}\right)\right)}{3}\right)=6V$$

Na última passagem usamos a ideia análoga àquela provada no item anterior.

d) Usando a definição da $adj(M)$ para $i\neq j$ temos na multiplicação de matrizes $\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{x_j}=I_{ij}=0$. Para $i\neq k\neq j\neq i$ temos $\overrightarrow{u_i}\perp\overrightarrow{x_j}$ e $\overrightarrow{u_i}\perp\overrightarrow{x_k}$. Dessa forma, podemos concluir que $\overrightarrow{u_i}\parallel\left(\overrightarrow{x_j}\times\overrightarrow{x_k}\right)\Rightarrow\overrightarrow{u_i}\parallel\overrightarrow{v_i}$.

Lembrando que o vetor $\overrightarrow{v_i}$ tem direção perpendicular ao plano formado por $\overrightarrow{x_j}$ e $\overrightarrow{x_k}$. Por exemplo, $\overrightarrow{v_d}$ tem direção perpendicular ao plano formado por $\overrightarrow{x_b}$ e $\overrightarrow{x_c}$, ou seja, ao plano ABC.

e) Novamente, usando a definição da $adj\ (M)$ para $i=j$ temos na multiplicação de matrizes $\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{x_i}=(\det M\cdot I)_{ii}=\det M=6V$. Pelo item b sabemos que $\overrightarrow{x_i}\cdot\overrightarrow{v_i}=-3V$.

Já sabemos que $\overrightarrow{u_i}\parallel\overrightarrow{v_i}$, então para determinar a relação entre eles só precisamos de sentido e módulo. Das duas equações temos $\overrightarrow{u_i}=-2\cdot\overrightarrow{v_i}$.

f) Aplicando det nos dois lados da definição da $adj(M)$ e usando que $\det M\cdot I$ é a matriz diagonal 3×3 com $\det M$ na diagonal principal temos

$$\det\left(adj(M)\right)\cdot\det M=(\det M)^3\Rightarrow\det\left(adj(M)\right)=(\det M)^2$$

Isolando M na equação da $adj(M)$ temos

$$M=adj(M)^{-1}(\det M\cdot I)$$

Mas a multiplicação do lado direito apenas multiplica cada termo por $\det M=\sqrt{\det\left(adj(M)\right)}$ e podemos concluir que

$$M=adj(M)^{-1}\sqrt{\det\left(adj(M)\right)}$$

g) A partir de $\overrightarrow{v_b}$, $\overrightarrow{v_c}$ e $\overrightarrow{v_d}$ temos as linhas da $adj(M)$, pois cada linha é dada por $\overrightarrow{u_i} = -2 \cdot \overrightarrow{v_i}$. Com a $adj(M)$ temos a matriz M e com a matriz M temos os vetores $\overrightarrow{x_b} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{x_c} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{x_d} = \overrightarrow{AD}$ determinando unicamente o tetraedro com vetores área $\overrightarrow{v_b}$, $\overrightarrow{v_c}$, $\overrightarrow{v_d}$ e $\overrightarrow{v_a} = -\overrightarrow{v_b} - \overrightarrow{v_c} - \overrightarrow{v_d}$

h) Das igualdades de área temos $|\overrightarrow{v_d}| = |\overrightarrow{v_c}| = S_1$ e $|\overrightarrow{v_b}| = |\overrightarrow{v_a}| = S_2$. Assim, $\vec{v} = \overrightarrow{v_d} + \overrightarrow{v_c}$ é a diagonal de um losango e a rotação de 180° em torno de $\vec{v}$ leva $\overrightarrow{v_d}$ em $\overrightarrow{v_c}$ e $\overrightarrow{v_c}$ em $\overrightarrow{v_d}$. Veja que $\overrightarrow{v_a} + \overrightarrow{v_b} = -\overrightarrow{v_c} - \overrightarrow{v_d} = -\vec{v}$ e a transformação também leva $\overrightarrow{v_a}$ em $\overrightarrow{v_b}$ e vice-versa.

Dessa forma, $(\overrightarrow{v_a}, \overrightarrow{v_b}, \overrightarrow{v_c}, \overrightarrow{v_d})$ é levado em $(\overrightarrow{v_b}, \overrightarrow{v_a}, \overrightarrow{v_d}, \overrightarrow{v_c})$. Pelo que vimos anteriormente o tetraedro é unicamente determinado pelos vetores $\overrightarrow{v_i}$ e o tetraedro resultante é congruente ao original. Com isso, os triângulos ABC e ABD são congruentes e os triângulos ACD e BCD também são congruentes.

Critérios de correção

Item a: 0,8 ponto

- Usar as propriedades do produto vetorial para chegar em $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \times \left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{DA}$ ou equivalente .... 0,4 ponto
- Concluir que a soma é igual ao vetor nulo .... +0,4 ponto

Item b: 0,6 ponto

- Notar que $H = AB \cdot \cos\theta$ ou equivalente .... 0,4 ponto
- Concluir a demonstração .... +0,2 ponto

Item c: 0,6 ponto

- Escrever o $\det M$ usando o produto escalar .... 0,2 ponto
- Escrever o $\det M$ usando o produto escalar e o produto vetorial .... +0,2 ponto
- Concluir a demonstração .... +0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto

- Usar a definição de $adj(M)$ para concluir que $\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = I_{ij} = 0$ .... 0,4 ponto
- Usar $\overrightarrow{u_i} \perp \overrightarrow{v_j}$ e $\overrightarrow{u_i} \perp \overrightarrow{v_k}$ para concluir que $\overrightarrow{u_i} \parallel \left(\overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_k}\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_i} \parallel \overrightarrow{v_i}$ .... +0,2 ponto

Item e: 0,6 ponto

- Usar a definição de $adj(M)$ para concluir que $\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{x_i} = 6V$ .... 0,2 ponto
- Usar o item b para observar que $\overrightarrow{x_i} \cdot \overrightarrow{v_i} = -3V$ .... +0,2 ponto
- Usar o paralelismo e as duas equações para concluir que $\overrightarrow{u_i} = -2 \cdot \overrightarrow{v_i}$ .... +0,2 ponto

Item f: 0,6 ponto

- Aplicar $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ na equação da $adj(M)$ .... 0,2 ponto
- Concluir que $\det\left(adj(M)\right) = (\det M)^2$ .... +0,2 ponto
- Isolar a matriz M .... +0,2 ponto

Item g: 0,6 ponto

- Notar que os $\overrightarrow{v_i}$ determinam a $adj(M)$ .... 0,2 ponto
- Notar a $adj(M)$ determina a M .... +0,2 ponto
- Notar que M determina o tetraedro .... +0,2 ponto

Item h: 0,6 ponto

- Notar que $\overrightarrow{v_c}$ é levado em $\overrightarrow{v_d}$ ou equivalente .... 0,2 ponto
- Usar o fato de o tetraedro ser unicamente determinado pelos $\overrightarrow{v_i}$ .... +0,2 ponto
- Concluir da congruência dos tetraedros que as faces ABC e ABD são congruentes .... +0,2 ponto